ΛΥΣΕΙΣ

-40-

ΘΕΜΑ 4

4.1. Το μέτρο της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου δίνεται από τη σχέση:

$$E = \frac{V}{d} \text{ ή } E = \frac{10^2}{10^{-1}}\frac{V}{m} \text{ ή } E = 10^3 \frac{N}{C}$$

Μονάδες 5

4.2. Η συνολική δύναμη που ασκείται στο ηλεκτρόνιο είναι ίση με την δύναμη $\vec{F}_{\eta\lambda}$ του ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου:

$$\Sigma\vec{F} = \vec{F}_{\eta\lambda} = \vec{E} \cdot (-e)$$

Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής μπορεί να υπολογιστεί από την γενικότερη σχέση έκφρασης του δεύτερου Νόμου του Νεύτωνα. Δηλαδή:

$$\Sigma\vec{F} = \frac{\Delta\vec{P}}{\Delta t} = \vec{E} \cdot (-e) \text{ ή } \left|\frac{\Delta\vec{P}}{\Delta t}\right| = E \cdot e \text{ ή}$$

$$\left|\frac{\Delta\vec{P}}{\Delta t}\right| = 10^3 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\, N \text{ ή } \frac{\Delta P}{\Delta t} = 1{,}6 \cdot 10^{-16}\, N$$

Μονάδες 6

4.3. Αν το ηλεκτρόνιο εκτοξεύεται με αρχική ταχύτητα υ_0 παράλληλα με τις δυναμικές γραμμές του πεδίου θα κινηθεί κατά μήκος της δυναμικής γραμμής στην οποία βρίσκεται και θα δεχθεί δύναμη μέτρου F με αντίθετη κατεύθυνση από εκείνη της φοράς των δυναμικών γραμμών.

Γράφουμε το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας από την αρχική του θέση έως ότου σταματήσει στιγμιαία.

$$K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = W_F \text{ ή } 0 - K_{\alpha\rho\chi} = -F\, d \text{ ή } K_{\alpha\rho\chi} = F\, d \text{ ή } K_{\alpha\rho\chi} = E\, e\, d$$

$$\text{ή } K_{\alpha\rho\chi} = 10^3 \left(\frac{N}{C}\right) \cdot e \cdot 10^{-1}(m) \text{ ή } K_{\alpha\rho\chi} = 100\, eV$$

Μονάδες 7

4.4. Αν τώρα το ηλεκτρόνιο ξεκινήσει με αρχική ταχύτητα υ_0 από την αρνητικά φορτισμένη πλάκα τότε θα φθάσει στη θετική φορτισμένη μεταλλική πλάκα με ταχύτητα υ_1. Η δύναμη που δέχεται έχει τώρα την κατεύθυνση της κίνησης του ηλεκτρονίου. Γράφουμε το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας για την μετακίνηση του ηλεκτρονίου μεταξύ των παραπάνω θέσεων οπότε θα έχουμε:

$$K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = W_F \text{ ή } K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = F\, d \text{ ή } K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = E\, e\, d \text{ ή}$$

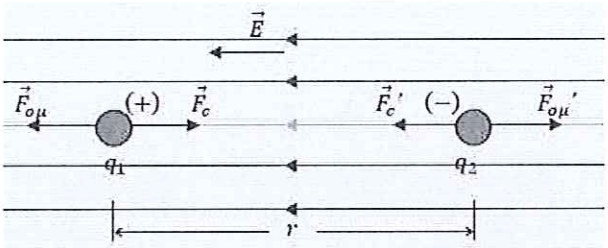
$$K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = 100\, eV \text{ ή } K_{\tau\varepsilon\lambda} = 200 eV$$

Εάν πάρουμε το πηλίκο:

$$\frac{K_{\tau\varepsilon\lambda}}{K_{\alpha\rho\chi}} = \frac{200eV}{100eV} = 2 \text{ ή } \frac{\frac{1}{2}m\upsilon_1^2}{\frac{1}{2}m\upsilon_0^2} = 2 \text{ ή } \frac{\upsilon_1^2}{\upsilon_0^2} = 2 \text{ ή } \frac{\upsilon_1}{\upsilon_0} = \sqrt{2}$$

ΘΕΜΑ 4

4.1. Μεταξύ των δύο σφαιριδίων ασκούνται αντίθετες (ελκτικές) δυνάμεις Coulomb ($\vec{F}_c, \vec{F}_c{}'$). Στο θετικά φορτισμένο σφαιρίδιο (1), ασκείται δύναμη από το ομογενές ηλεκτρικό πεδίο ($\vec{F}_{o\mu}$), ομόρροπη της έντασης $\vec{E}$ του πεδίου αυτού. Στο αρνητικά φορτισμένο σφαιρίδιο (2), ασκείται δύναμη από το ομογενές ηλεκτρικό πεδίο ($\vec{F}_{o\mu}{}'$), αντίρροπη της έντασης $\vec{E}$ του πεδίου αυτού. Κάθε σφαιρίδιο ισορροπεί ακίνητο με την επίδραση αυτών των δύο δυνάμεων, όπως στο σχήμα.

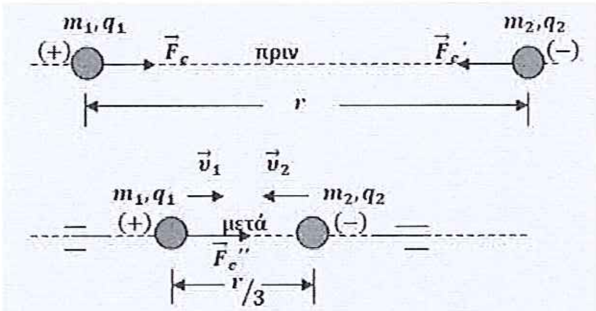


Ισχύει: $F_c = F_{o\mu}$, $K_{\eta\lambda}\cdot\frac{q_1\cdot|q_2|}{r^2} = E\cdot q_1$

$r^2 = \frac{K_{\eta\lambda}\cdot|q_2|}{E} = 9\cdot10^{-2}\ \mathrm{m}^2$, $r = 0{,}3\ \mathrm{m}$

Μονάδες 7

4.2.Όταν καταργείται το ομογενές ηλεκτρικό πεδίο, τα δύο φορτισμένα σφαιρίδια, αρχίζουν να κινούνται στην ευθεία που ορίζουν τα κέντρα τους, πλησιάζοντας το ένα στο άλλο, με επιταχυνόμενες κινήσεις εξαιτίας των ελκτικών δυνάμεων μεταξύ τους.



Οι δυνάμεις αυτές είναι εσωτερικές για το σύστημα των δύο σφαιριδίων και συντηρητικές. Έτσι για το σύστημα των δύο σφαιριδίων ισχύουν:

η αρχή διατήρησης της ορμής:

$\vec{p}^{\,\pi\rho\iota\nu}_{\sigma\upsilon\sigma\tau} = \vec{p}^{\,\mu\varepsilon\tau\alpha}_{\sigma\upsilon\sigma\tau}$, $0 = m_1\cdot\upsilon_1 - m_2\cdot\upsilon_2$, $\upsilon_2 = \frac{m_1}{m_2}\cdot\upsilon_1 = \frac{240}{60}\cdot\upsilon_1$, $\upsilon_2 = 4\cdot\upsilon_1$ (1)

η αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας:

$E^{\pi\rho\iota\nu}_{MHX} = E^{\mu\varepsilon\tau\alpha}_{MHX}$, $k_{\eta\lambda}\cdot\frac{q_1\cdot q_2}{r} = \frac{1}{2}\cdot m_1\cdot\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}\cdot m_2\cdot\upsilon_2^2 + k_{\eta\lambda}\cdot\frac{3\cdot q_1\cdot q_2}{\cdot r}$

ή $k_{\eta\lambda}\cdot q_1\cdot q_2\cdot\left(\frac{1}{r}-\frac{3}{r}\right) = \frac{1}{2}\cdot(m_1\cdot\upsilon_1^2 + m_2\cdot16\cdot\upsilon_1^2)$

ή $9\cdot10^9\cdot8\cdot10^{-6}\cdot(-8)\cdot10^{-6}\left(-\frac{2}{0{,}3}\right) = \frac{\upsilon_1^2}{2}\cdot(m_1 + 16\cdot m_2)$, $(S.I)$

ή $\frac{20}{3}\cdot9\cdot64\cdot10^{-3} = \frac{\upsilon_1^2}{2}\cdot(240+16\cdot60)\cdot10^{-6}$, $(S.I)$

ή $\upsilon_1^2 = \frac{20\cdot9\cdot64\cdot10^{-3}}{3\cdot600\cdot10^{-6}} = 6400\ \frac{m^2}{s^2}$, $\upsilon_1 = 80\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, οπότε $\upsilon_2 = 320\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

Μονάδες 7

4.3.Τη χρονική στιγμή που τα σφαιρίδια απέχουν μεταξύ τους $\frac{r}{3} = 0{,}1\ m$, το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της ορμής του σφαιριδίου (1) σύμφωνα με το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα, είναι:

$$\left|\frac{\Delta p_1}{\Delta t}\right| = F_c{}'' = k_{\eta\lambda}\cdot\frac{q_1\cdot|q_2|}{\left(\frac{r}{3}\right)^2} = 57{,}6\ \mathrm{kg}\cdot\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Μονάδες 5

4.4. Μπορούμε να υπολογίσουμε το έργο της ελκτικής δύναμης που δέχεται το σφαιρίδιο (1), εφαρμόζοντας το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας για το σφαιρίδιο αυτό:

$$W_1 = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot \upsilon_1^2 - 0 = \frac{1}{2} \cdot 240 \cdot 10^{-6} \cdot 80^2 \text{ J} = 12 \cdot 10^{-5} \cdot 64 \cdot 10^2 \text{ J} = 0{,}768 \text{ J}$$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 4

4.1. Η ηλεκτρική δυναμική ενέργεια του συστήματος των δύο σφαιρών στο ύψος h είναι:

$$U = K \cdot \frac{Q \cdot q}{h} \leftrightarrow$$

$$U = 9 \cdot 10^{9}\ \frac{N \cdot m^2}{C^2} \cdot \frac{8 \cdot 10^{-6} C \cdot 10^{-7} C}{9 \cdot 10^{-1} m} \leftrightarrow$$

$$U = 8 \cdot 10^{-3}\ J.$$

Μονάδες 3

4.2. Το έργο της δύναμης του ηλεκτροστατικού πεδίου κατά την πτώση της δεύτερης σφαίρας μέχρι το σημείο Α είναι:

$$W_F = q \cdot (V_{αρχ} - V_{τελ}) = q \cdot \left(K \cdot \frac{Q}{h} - K \cdot \frac{Q}{\frac{2h}{3}} \right) = -K \cdot \frac{Q \cdot q}{2h} \leftrightarrow$$

$$W_F = -9 \cdot 10^{9}\ \frac{N \cdot m^2}{C^2} \cdot \frac{8 \cdot 10^{-6} C \cdot 10^{-7} C}{2 \cdot 9 \cdot 10^{-1} m} = -4 \cdot 10^{-3}\ J$$

Μονάδες 6

4.3. Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ για την πτώση της δεύτερης σφαίρας μεταξύ της αρχικής θέσης της (ύψος h από το έδαφος) και του σημείου Α (ύψος $\frac{2h}{3}$ από το έδαφος):

$$\Delta K = \Sigma W \leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot u^2 - 0 = W_W + W_F \leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot m \cdot u^2 = m \cdot g \cdot \left(h - \frac{2h}{3}\right) + W_F \leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot u^2 = \frac{m \cdot g \cdot h}{3} + W_F \leftrightarrow$$

$$u^2 = \frac{2 \cdot g \cdot h}{3} + \frac{2 \cdot W_F}{m} \leftrightarrow$$

$$u = 2\ m/s$$

Μονάδες 6

4.4. Έστω d το ελάχιστο ύψος από το έδαφος, που θα πλησιάσει η δεύτερη σφαίρα το φορτίο Q. Θα εφαρμόσουμε ΘΜΚΕ για την πτώση της σφαίρας από το ύψος h έως τη θέση αυτή. Αφού η κάθοδος της σφαίρας σταματά στο σημείο αυτό, η ταχύτητά της εκεί θα είναι μηδενική:

$$\Delta K = \Sigma W \leftrightarrow 0 = W_W + W_F \leftrightarrow$$

$$0 = m \cdot g \cdot (h - d) + q \cdot (V_{\alpha\rho\chi} - V_{\tau\varepsilon\lambda}) \leftrightarrow$$

$$0 = m \cdot g \cdot (h - d) + q \cdot \left(K \cdot \frac{Q}{h} - K \cdot \frac{Q}{d} \right) \leftrightarrow$$

$$0 = m \cdot g \cdot (h - d) + K \cdot Q \cdot q \cdot \left(\frac{1}{h} - \frac{1}{d} \right) \leftrightarrow$$

$$0 = m \cdot g \cdot (h - d) - K \cdot Q \cdot q \cdot \left(\frac{h - d}{h \cdot d} \right) \leftrightarrow$$

$$0 = (h - d) \cdot \left(m \cdot g - \frac{K \cdot Q \cdot q}{h \cdot d} \right)$$

Από την παραπάνω εξίσωση λαμβάνουμε ως λύσεις:

$d = h$, δηλαδή η αρχική θέση της σφαίρας και:

$d = \frac{K \cdot Q \cdot q}{m \cdot g \cdot h} = 20\text{cm}.$

Αποδεχόμαστε τη λύση $d = 20\text{cm}$ αφού πρέπει $d < h$.

Μονάδες 10

__ΣΗΜΕΙΩΣΗ:__ Στο σημείο αυτό είναι ενδιαφέρον να αναστοχαστούμε τη λύση του ερωτήματος 4.4. Εφαρμόσαμε το Θ.Μ.Κ.Ε. αναζητώντας το κατώτατο σημείο της κίνησης, στο οποίο η ταχύτητα μηδενίζεται. Τα Μαθηματικά, όμως, που χαρακτηρίζονται από ορθολογισμό, μας έδωσαν όλες τις θέσεις όπου ισχύει αυτό, δηλαδή τόσο το σημείο τερματισμού όσο και την αφετηρία τη κίνησης. Αυτό είναι ένα σπουδαίο χαρακτηριστικό των Μαθηματικών, ότι δηλαδή πάντοτε μας δίνουν όλες τις λύσεις που ταιριάζουν με τους περιορισμούς που θέτουμε γράφοντας τις εξισώσεις και όχι μόνο εκείνες που αναζητούμε!

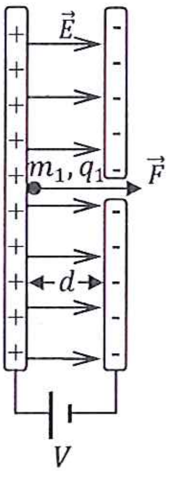
ΘΕΜΑ 4

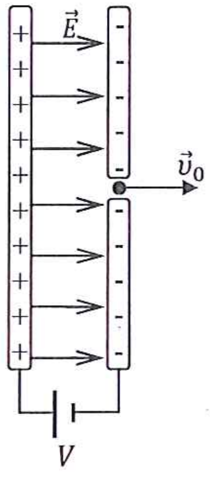
4.1. Το σωματίδιο (Σ_1) δέχεται δύναμη $\vec{F}$ για την οποία ισχύει:

$$\vec{F} = q\vec{E} \Rightarrow m_1\vec{a} = q\vec{E} \quad (1)$$

Για το μέτρο της έντασης του ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου και της διαφοράς δυναμικού (που είναι ίση με τη τάση φόρτισης) μεταξύ των οπλισμών του πυκνωτή ισχύει η σχέση

$$E = \frac{V}{d} \quad (2)$$





Από τις σχέσεις (1) και (2) για το μέτρο της επιτάχυνσης έχουμε

$$\alpha = \frac{qV}{m_1 d}$$

και τελικά

$$\boldsymbol{\alpha = 6,25 \cdot 10^8\ \frac{m}{s^2}} \quad (3)$$

Μονάδες 6

4.2. Το σωματίδιο (Σ_1) εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση χωρίς αρχική ταχύτητα. Έχουμε:

$$d = \frac{1}{2}\alpha\Delta t^2 \Rightarrow \Delta t = \sqrt{\frac{2d}{\alpha}} \overset{(3)}{\Rightarrow} \boldsymbol{\Delta t = 16 \cdot 10^{-6}\ s} \quad (4)$$

$$\text{και } \upsilon_0 = \alpha\Delta t \xrightarrow{(3),(4)} \boldsymbol{\upsilon_0 = 10^4\ \frac{m}{s}}$$

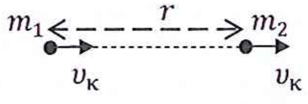
Μονάδες 6

4.3. Αρχικά το σωματίδιο (Σ_2) ήταν ακίνητο. Το σωματίδιο (Σ_1) πλησιάζει το σωματίδιο (Σ_2) έχοντας αρχική ταχύτητα υ_0. Τα δύο σωματίδια έχουν ομώνυμα φορτία και το ένα απωθεί το άλλο με αποτέλεσμα το σωματίδιο (Σ_1) να επιβραδύνεται και το σωματίδιο (Σ_2) να επιταχύνεται. Για όσο χρονικό διάστημα η ταχύτητα του σωματιδίου (Σ_1) είναι μεγαλύτερη αυτής του σωματιδίου (Σ_2) $(\upsilon_1 > \upsilon_2)$, το (Σ_1) θα πλησιάζει το (Σ_2). Κάποια στιγμή οι ταχύτητες των δύο σωματιδίων θα γίνουν ίσες $(\upsilon_1 = \upsilon_2 = \upsilon_\kappa)$. Τη στιγμή αυτή τα σωματίδια θα έχουν την ελάχιστη μεταξύ τους απόσταση. Στη συνέχεια το σωματίδιο (Σ_2) θα εξακολουθεί να επιταχύνεται απομακρυνόμενο από το σωματίδιο (Σ_1) το οποίο θα επιβραδύνεται $(\upsilon_1 < \upsilon_2)$.

Το σύστημα των δύο σωματιδίων είναι μονωμένο. Από την αρχή διατήρησης της ορμής έχουμε:

$$\vec{P}_{\alpha\rho\chi} = \vec{P}_{\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow$$

$$m_1\upsilon_0 = m_1\upsilon_\kappa + m_2\upsilon_\kappa \xrightarrow{m_1 = m_2 = m} \upsilon_\kappa = \frac{\upsilon_0}{2}$$



και τελικά

$$\boldsymbol{\upsilon_\kappa = 5 \cdot 10^3\ \frac{m}{s}}$$

Μονάδες 6

- 43 - συνέχεια.

4.4. Εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας για το σύστημα των δύο σωματιδίων τη στιγμή που η μεταξύ τους απόσταση έχει γίνει ελάχιστη και επομένως έχουν αποκτήσει κοινή ταχύτητα (ερώτημα 4.3.) έχουμε:

$$K_{\alpha\rho\chi} + U_{\alpha\rho\chi} = K_{\tau\varepsilon\lambda} + U_{\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow K_{\alpha\rho\chi} + 0 = K_{\tau\varepsilon\lambda} + U_{\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}m_1 \upsilon_0^2 = \frac{1}{2}m_1 \upsilon_\kappa^2 + \frac{1}{2}m_2 \upsilon_\kappa^2 + k_c \frac{q_1\, q_2}{r} \xRightarrow{m_1 = m_2 = m,\ \upsilon_\kappa = \frac{\upsilon_0}{2},\ q_2 = 2q_1}$$

$$\frac{1}{2}m\upsilon_0^2 = 2\frac{1}{2}m\left(\frac{\upsilon_0}{2}\right)^2 + k_c \frac{2q_1^2}{r} \Rightarrow r = \frac{8k_c q_1^2}{m\upsilon_0^2}$$

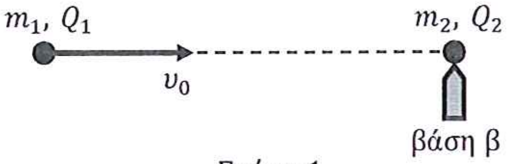
και τελικά

$$\boldsymbol{r = 18 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{m}}$$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4

4.1. Εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας για το σύστημα των δύο σωματιδίων έχουμε



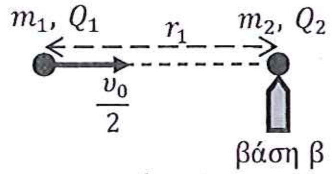
Σχήμα 1

$$K_{\alpha\rho\chi} + U_{\alpha\rho\chi} = K_{\tau\varepsilon\lambda} + U_{\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow$$

$$K_{\alpha\rho\chi} + 0 = K_{\tau\varepsilon\lambda} + U_{\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}m_1\upsilon_0^2 = \frac{1}{2}m_1\left(\frac{\upsilon_0}{2}\right)^2 + k_c\frac{Q_1\,Q_2}{r_1} \xrightarrow{m_1 = m,\, Q_2 = 2Q_1}$$

$$\frac{3}{8}m\upsilon_0^2 = k_c\frac{2Q_1^2}{r_1} \Rightarrow r_1 = \frac{16k_cQ_1^2}{3m\upsilon_0^2}$$



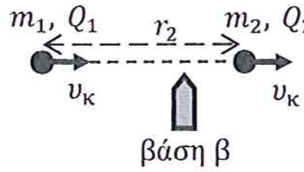
Σχήμα 2

και τελικά

$$\mathbf{r_1 = 147 \cdot 10^{-3}\ m}$$

Μονάδες 6

4.2. Μετά τη χρονική στιγμή που απελευθερώνεται το σωματίδιο (Σ_2), το σύστημα των δύο σωματιδίων είναι μονωμένο και τα δύο σωματίδια θα βρεθούν στην ελάχιστη μεταξύ τους απόσταση τη στιγμή κατά την οποία οι ταχύτητές τους θα εξισωθούν ($\upsilon_1 = \upsilon_2 = \upsilon_\kappa$). Από την αρχή διατήρησης της ορμής έχουμε:



Σχήμα 3

$$\vec{P}_{\alpha\rho\chi} = \vec{P}_{\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow$$

$$m_1\frac{\upsilon_0}{2} = m_1\upsilon_\kappa + m_2\upsilon_\kappa \xrightarrow{m_1 = m_2 = m} m\frac{\upsilon_0}{2} = 2m\upsilon_\kappa \Rightarrow \upsilon_\kappa = \frac{\upsilon_0}{4}$$

και τελικά

$$\mathbf{\upsilon_\kappa = 25\ m/s}$$

Μονάδες 6

4.3. Εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας για το σύστημα των δύο σωματιδίων τη στιγμή που η μεταξύ τους απόσταση έχει γίνει ελάχιστη και επομένως έχουν αποκτήσει κοινή ταχύτητα (ερώτημα 4.2.) έχουμε:

$$K_{\alpha\rho\chi} + U_{\alpha\rho\chi} = K_{\tau\varepsilon\lambda} + U_{\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow K_{\alpha\rho\chi} + 0 = K_{\tau\varepsilon\lambda} + U_{\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}m_1\upsilon_0^2 = \frac{1}{2}m_1\upsilon_\kappa^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_\kappa^2 + k_c\frac{Q_1\,Q_2}{r_2} \xrightarrow{m_1 = m_2 = m,\ \upsilon_\kappa = \frac{\upsilon_0}{4},\ Q_2 = 2Q_1}$$

$$\frac{1}{2}m\upsilon_0^2 = 2\frac{1}{2}m\left(\frac{\upsilon_0}{4}\right)^2 + k_c\frac{2Q_1^2}{r_2} \Rightarrow r_2 = \frac{32k_cQ_1^2}{7m\upsilon_0^2}$$

και τελικά

$$\mathbf{r_2 = 126 \cdot 10^{-3}\ m}$$

Μονάδες 7

4.4. Η μεταβολή της ορμής του συστήματος $\left(\Delta\vec{P}_{\sigma\upsilon\sigma\tau.}\right)$ των δύο σωματιδίων δίδεται από τη σχέση:

$$\Delta\vec{P}_{\sigma\upsilon\sigma\tau.} = \vec{P}_{\sigma\upsilon\sigma\tau.,\tau\varepsilon\lambda} - \vec{P}_{\sigma\upsilon\sigma\tau.,\alpha\rho\chi}$$

και για το μέτρο της μεταβολής της ορμής του συστήματος (θεωρώντας θετική τη φορά προς τα δεξιά στα σχήματα 1 και 3) έχουμε:

$$\left|\Delta\vec{P}_{\sigma\upsilon\sigma\tau.}\right| = \left|\vec{P}_{\sigma\upsilon\sigma\tau.,\tau\varepsilon\lambda} - \vec{P}_{\sigma\upsilon\sigma\tau.,\alpha\rho\chi}\right| \Rightarrow$$

$$\left|\Delta\vec{P}_{\sigma\upsilon\sigma\tau.}\right| = |2m\upsilon_{\mathrm{K}} - m\upsilon_0|$$

και τελικά

$$\left|\Delta\vec{P}_{\sigma\upsilon\sigma\tau.}\right| = \mathbf{8\cdot 10^{-6}\ kg\frac{m}{s}}$$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 4

4.1. Στο σωματίδιο (1) καθώς κινείται προς το ακίνητο σωματίδιο (2), ασκείται μόνο η απωστική δύναμη Coulomb η οποία αναπτύσσεται μεταξύ των φορτισμένων σωματιδίων. Η δύναμη αυτή είναι διατηρητική δύναμη και κατά την κίνηση του (1) προς το ακίνητο (2), μέχρι να φτάσει στην απόσταση d_1 από αυτό, ισχύει η αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας, θεωρώντας ως δυναμική ενέργεια αποκλειστικά λόγω της ηλεκτρικής αλληλεπίδρασης μεταξύ τους;

$E_{M\eta\chi}^{\alpha\rho\chi} = E_{M\eta\chi}^{1}$, $\delta\eta\lambda\alpha\delta\acute{\eta}$: $K_{\alpha\rho\chi} = U_{\eta\lambda}^{1} + K_1$, ή $\frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot \upsilon_0^2 = k_{\eta\lambda} \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{d_1} + \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot (\frac{\upsilon_0}{2})^2$

ή $\frac{3}{8} \cdot m_1 \cdot \upsilon_0^2 = k_{\eta\lambda} \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{d_1}$,

άρα είναι: $d_1 = \frac{8 \cdot k_{\eta\lambda} \cdot q_1 \cdot q_2}{3 \cdot m_1 \cdot \upsilon_0^2} = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10^9 \cdot 7 \cdot 10^{-6} \cdot 7 \cdot 10^{-6}}{3 \cdot 70 \cdot 10^{-9} \cdot 4 \cdot 10^8} = 42 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m} = 4{,}2\ \mathrm{cm}$

Μονάδες 6

4.2. $|\Delta p_{\sigma\upsilon\sigma\tau}| = |\Delta p_1| = \left|m_1 \cdot \frac{\upsilon_0}{2} - m_1 \cdot \upsilon_0\right| = \left|-\frac{m_1 \cdot \upsilon_0}{2}\right| = \frac{m_1 \cdot \upsilon_0}{2} = 70 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{kg} \cdot \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 7 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{kg} \cdot \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

Μονάδες 6

Μετά την απελευθέρωση του σωματιδίου (1), τα δύο σωματίδια κινούνται στην ευθεία της διακέντρου τους και εξαιτίας της ηλεκτρικής άπωσης που δημιουργείται μεταξύ τους, το σωματίδιο (1) επιβραδύνεται, ενώ το σωματίδιο (2) επιταχύνεται από την ηρεμία. Όσο χρόνο όμως η ταχύτητα του (1) είναι κατά μέτρο μεγαλύτερη από του (2), το πλησιάζει και η μεταξύ τους απόσταση μειώνεται. Η ελάχιστη μεταξύ τους απόσταση θα παρατηρείται, τη στιγμή που εξισώνονται οι ταχύτητές τους ($\upsilon_1{}' = \upsilon_2 = \upsilon$).
Από τη στιγμή που απελευθερώθηκε το (2), το σύστημα των δύο σωματιδίων είναι μονωμένο και οι δυνάμεις που εκτελούν έργο είναι διατηρητικές.
Ισχύουν για το σύστημα:

4.3. Αρχή διατήρησης της ορμής:
$p_{\sigma\upsilon\sigma\tau} = \sigma\tau\alpha\theta.$, άρα $m_1 \cdot \frac{\upsilon_0}{2} = (m_1 + m_2) \cdot \upsilon$, οπότε η κοινή τους ταχύτητα στην ελάχιστη μεταξύ τους απόσταση: $\upsilon = \frac{m_1 \cdot \upsilon_0}{2 \cdot (m_1 + m_2)} = \frac{\upsilon_0}{4} = 5 \cdot 10^3\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

Μονάδες 6

4.4. Αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας:
$E_{M\eta\chi}^{\sigma\upsilon\sigma\tau} = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\eta}$, άρα $\frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot \frac{\upsilon_0^2}{4} + k_{\eta\lambda} \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{d_1} = \frac{1}{2} \cdot (m_1 + m_2)\upsilon^2 + k_{\eta\lambda} \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{d_{min}}$

ή $\frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot \upsilon_0^2 = \frac{1}{2} \cdot (m_1 + m_2) \cdot \upsilon^2 + k_{\eta\lambda} \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{d_{min}}$

ή $\frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot \upsilon_0^2 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot m_1 \cdot \frac{\upsilon_0^2}{16} = k_{\eta\lambda} \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{d_{min}}$

ή $k_{\eta\lambda} \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{d_{min}} = \frac{7}{16} \cdot m_1 \cdot \upsilon_0^2$, οπότε προκύπτει $d_{min} = \frac{16 \cdot k_{\eta\lambda} \cdot q_1 \cdot q_2}{7 \cdot m_1 \cdot \upsilon_0^2}$

τελικά $d_{min} = \frac{16 \cdot 9 \cdot 10^9 \cdot 7 \cdot 10^{-6} \cdot 7 \cdot 10^{-6}}{7 \cdot 70 \cdot 10^{-9} \cdot 4 \cdot 10^8}\ \mathrm{m} = 36 \cdot 10^{-3}\ m = 0{,}036\ \mathrm{m} = 3{,}6\ \mathrm{cm}$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4

4.1. Το αντικείμενο θα περιστρέφεται μαζί με τα σημεία της επιφάνειας του αστέρα νετρονίων, εκτελώντας ομαλή κυκλική κίνηση. Η γραμμική ταχύτητά του θα είναι

$$v = \frac{2\pi R}{T} = 2\pi R f = 2\pi(10\ km)(700\ Hz) = 2\pi(10 \times 10^3\ m)(700\ Hz) = 14\pi \times 10^6\ m/s$$

Μονάδες 6

4.2. Η κεντρομόλος επιτάχυνση δίνεται πάντα από τον τύπο

$$a_\kappa = \frac{v^2}{R}$$

Στη συγκεκριμένη περίπτωση:

$$a_\kappa = \frac{(14\pi \times 10^6 \frac{m}{s})^2}{10^4\ m} = 196\pi^2 10^8 \frac{m}{s^2} \cong 1{,}96 \times 10^{11} m/s^2$$

Η κατεύθυνση της κεντρομόλου επιτάχυνσης θα ήταν προς το κέντρο του αστέρα νετρονίων.

Μονάδες 6

4.3. Η επιτάχυνση βαρύτητας σε απόσταση R από σημειακή μάζα M (ή από το κέντρο σφαιρικής μάζας M) ισούται με την ένταση του πεδίου βαρύτητας και δίνεται από τον τύπο:

$$g = \frac{GM}{R^2} \text{ (1 μονάδα)}$$

Στην επιφάνεια του αστέρα νετρονίων θα είναι :

$$g_{AN} = \frac{2 \times 10^{20}\ Nm^2/kg}{(10^4\ m)^2} = 2 \times 10^{12}\ N/kg = 2 \times 10^{12}\ m/s^2 \text{ (3 μονάδες)}$$

Σε σχέση με την επιτάχυνση της βαρύτητας στην επιφάνεια της Γης, η τιμή αυτή είναι:

$$\frac{g_{AN}}{g_{\Gamma\eta\varsigma}} = \frac{2 \times 10^{12}\ m/s^2}{10\ m/s^2} = 2 \times 10^{11}$$

δηλαδή 200.000.000.000 φορές μεγαλύτερη (3 μονάδες).

Μονάδες 7

4.4. Το αντικείμενο, έστω μάζας m, θα κινηθεί μόνο με την επίδραση της βαρύτητας, συνεπώς μπορούμε να εφαρμόσουμε την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας.

$$(U + K)_{\sigma\varepsilon\ \pi o\lambda\upsilon\ \mu\varepsilon\gamma\alpha\lambda\eta\ \alpha\pi o\sigma\tau\alpha\sigma\eta} = (U + K)_{\sigma\tau\eta\nu\ \varepsilon\pi\iota\varphi\alpha\nu\varepsilon\iota\alpha}$$

$$0 + 0 = \left(-\frac{GMm}{R}\right) + \frac{1}{2}mv^2$$

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \sqrt{\frac{2(2 \times 10^{20} \frac{Nm^2}{kg})}{10^4\ m}} = 2 \times 10^8\ m/s$$

(Στην πραγματικότητα η παραπάνω τιμή είναι μόνο μία εκτίμηση, με δεδομένο πως υπάρχουν και σχετικιστικά φαινόμενα)

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 4

4.1. Η αρχική ηλεκτρική δυναμική ενέργεια του συστήματος των δύο ηλεκτρικών φορτίων δίνεται από τη σχέση:

$$U_{αρχ} = K_c \frac{Q\,q}{AB} \text{ ή } U_{αρχ} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{0{,}4 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot 10^{-8}}{1} J \text{ ή } U_{αρχ} = 72 \cdot 10^{-6} J$$

Μονάδες 5

4.2. Εάν αφήσουμε ελεύθερο το ηλεκτρικό φορτίο q θα ασκηθεί σε αυτό ηλεκτρική δύναμη και θα μετακινηθεί. Όταν βρεθεί στη θέση Γ η δυναμική ηλεκτρική ενέργεια των δύο ηλεκτρικών φορτίων είναι:

$$U_{τελ} = K_c \frac{Q\,q}{AΓ} \text{ ή } U_{τελ} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{0{,}4 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot 10^{-8}}{2} J \text{ ή } U_{τελ} = 36 \cdot 10^{-6} J$$

Η ηλεκτρική δυναμική ενέργεια θα ελαττωθεί και η τιμή της μεταβολής $ΔU$ είναι:

$$ΔU = U_{τελ} - U_{αρχ} \text{ ή } ΔU = 36 \cdot 10^{-6} J - 72 \cdot 10^{-6} J \text{ ή } ΔU = -36 \cdot 10^{-6} J$$

Μονάδες 6

4.3. Με βάση τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας κατά τη μετακίνηση του ηλεκτρικού φορτίου από τη θέση Β στη θέση Γ θα έχουμε:

$$K_{αρχ} + U_{αρχ} = K_{τελ} + U_{τελ} \text{ ή } 0 + 72 \cdot 10^{-6} J = K_{τελ} + 36 \cdot 10^{-6} J$$

$$\text{ή } K_{τελ} = 36 \cdot 10^{-6} J \text{ ή } \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 10^{-6} (Kg) \cdot υ^2 = 36 \cdot 10^{-6} (J) \text{ ή } υ = 6 \frac{m}{s}$$

Μονάδες 7

4.4. Αν απομακρυνθεί το ηλεκτρικό φορτίο q τόσο ώστε να βγει εκτός του ηλεκτρικού πεδίου του φορτίου Q (σε σημείο Δ), η ηλεκτρική δυναμική ενέργεια του συστήματος των ηλεκτρικών φορτίων θα είναι μηδέν. Τότε σύμφωνα με τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας για τη μετακίνηση του ηλεκτρικού φορτίου q από το σημείο Β μέχρι το σημείο Δ θα έχουμε:

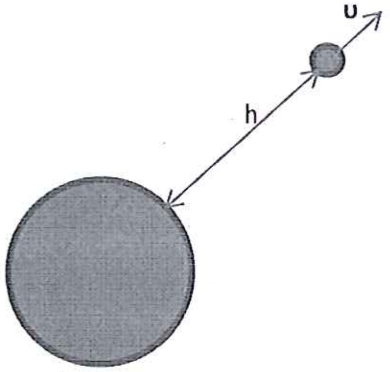
$$K_{αρχ} + U_{αρχ} = K_{τελ} + U_{τελ} \text{ ή } 0 + 72 \cdot 10^{-6} J = K_{τελ}$$

$$\text{ή } \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 10^{-6} (Kg) \cdot υ^2 = 72 \cdot 10^{-6} J \text{ ή } υ = 6\sqrt{2} \frac{m}{s}$$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4

4.1.



Η ταχύτητα υ του διαστημόπλοιου στο ύψος h είναι η ταχύτητα διαφυγής από το πεδίο βαρύτητας της Γης. Η ταχύτητα αυτή υπολογίζεται με εφαρμογή της αρχής διατήρησης της μηχανικής ενέργειας κατά την κίνηση του σώματος μεταξύ των δύο θέσεων, του σημείου Α που βρίσκεται σε ύψος h από την επιφάνεια της γης και για το άπειρο(∞). Στο άπειρο φθάνει το σώμα με μηδενική ταχύτητα και αφού δεν υπάρχει βαρυτική αλληλεπίδραση με τη Γη (και με κανένα άλλο ουράνιο σώμα). Η δυναμική ενέργεια του συστήματος Γης και σώματος είναι μηδέν. Έτσι έχουμε:

$$K_A + U_A = K_\infty + U_\infty \text{ ή}$$

$$\frac{1}{2}m\upsilon^2 + \left(-G\frac{mM}{R+h}\right) = 0 + 0 \text{ ή } \upsilon = \sqrt{2g_0\frac{R^2}{(R+h)}} \text{ ή } \upsilon = \sqrt{g_0 R} \text{ ή } \upsilon = 8\cdot 10^3\ \frac{m}{s}$$

Μονάδες 7

4.2. Αφού ανεβαίνει με σταθερή επιτάχυνση a η κίνηση θα είναι ομαλά επιταχυνόμενη. Με τη βοήθεια των εξισώσεων που περιγράφουν την κίνηση αυτή θα έχουμε:

Για το ύψος $h = \frac{1}{2}at^2$ και την ταχύτητα στη θέση αυτή που δίνεται από τη σχέση $\upsilon = \alpha t$

βρίσκουμε ότι: $h = \frac{1}{2}\ a\ \left(\frac{\upsilon}{\alpha}\right)^2$ ή $h = \frac{1}{2}a\frac{\upsilon^2}{\alpha^2}$ ή $h = \frac{\upsilon^2}{2\alpha}$ ή $\alpha = \frac{\upsilon^2}{2h}$

και με αριθμητική αντικατάσταση υπολογίζουμε: $a = \frac{(8\cdot 10^3)^2}{2\cdot 6400\cdot 10^3} = \frac{64\cdot 10^6}{2\cdot 64\cdot 10^5}\ \frac{m}{s^2}$ ή $\alpha = 5\frac{m}{s^2}$.

Με αντικατάσταση στη σχέση $\upsilon = \alpha t$ βρίσκουμε $t = 1600s$.

Μονάδες 5

4.3. Η ταχύτητα περιστροφής του δορυφόρου στο ύψος h = R υπολογίζεται ως εξής:

Η ελκτική δύναμη της βαρύτητας $F_{\beta\alpha\rho\upsilon\tau}$ παίζει το ρόλο της κεντρομόλου δύναμης.

$$F_{\beta\alpha\rho\upsilon\tau} = F_{\kappa\varepsilon\nu\tau\rho.} = \frac{m\upsilon^2}{(R+h)}$$

Η δύναμη της βαρύτητας $F_{\beta\alpha\rho\upsilon\tau}$ σύμφωνα με το νόμο της παγκόσμιας έλξης υπολογίζεται από την παρακάτω σχέση:

-48- συνεχεια.

$$F_{\beta\alpha\rho\upsilon\tau} = G\frac{Mm}{(R+h)^2} = \frac{g_0 R^2 m}{(R+h)^2}$$

Εάν εξισώσουμε τις παραπάνω σχέσεις θα υπολογίσουμε την ταχύτητα περιστροφής του δορυφόρου:

$$\frac{m\upsilon^2}{(R+h)} = \frac{g_0 R^2 m}{(R+h)^2} \quad \text{ή } \upsilon = \sqrt{\frac{g_0 R}{2}} \text{ ή } \upsilon = \sqrt{\frac{10\cdot 6400\cdot 10^3}{2}}\,\frac{m}{s} \text{ ή}$$

$$\upsilon = \sqrt{32}\cdot 10^3\,\frac{m}{s} \text{ ή } \upsilon = 4\sqrt{2}\cdot 10^3\,\frac{m}{s}$$

Μονάδες 5

4.4. Η περίοδος περιστροφής του δορυφόρου που βρίσκεται σε ύψος $h = R$ υπολογίζεται ως εξής:

$$\upsilon = \frac{2\pi(R+h)}{T} \text{ ή } T = \frac{2\pi(R+h)}{\upsilon} \text{ ή } T = \frac{4\pi R}{\upsilon} \text{ ή } T = \frac{4\pi\cdot 6400\cdot 10^3}{4\sqrt{2}\cdot 10^3} \text{ ή } T = 3200\sqrt{2}\pi\ s$$

Εάν συγκρίνουμε τον χρόνο που χρειάζεται να φθάσει ο πύραυλος στο ύψος $h = R$ ο οποίος είναι $t = 1600s$, με το χρόνο που χρειάζεται για την περιστροφή του ο δορυφόρος μέχρι να επιστρέψει στην ίδια ακριβώς θέση ο οποίος είναι $T = 3200\sqrt{2}\pi\ s$, βλέπουμε ότι είναι μικρότερος. Αυτό σημαίνει ότι δεν πρόκειται να συναντήσει τον δορυφόρο καθώς ανεβαίνει. Επομένως δεν υπάρχει πιθανότητα να συναντηθούν τα δύο σώματα.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 4

4.1. Το μέτρο της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου είναι:

$$E = \frac{V}{d} = \frac{1000\,V}{0{,}1m} = 10^4\ \frac{V}{m}.$$

Το φορτίο δέχεται δύναμη από το ηλεκτρικό πεδίο μέτρου:

$$F = E \cdot q = 10^4 \frac{V}{m} \cdot 2 \cdot 10^{-6} C = 2 \cdot 10^{-2} N.$$

Μονάδες 6

4.2. Όταν το φορτίο q μετακινείται κάθετα στις πλάκες κατά απόσταση x, κινείται στη διεύθυνση των δυναμικών γραμμών και ομόρροπα της δύναμης του πεδίου. Το έργο που παράγεται είναι:

$$W = F \cdot x = 2 \cdot 10^{-2} N \cdot 5 \cdot 10^{-2} m = 10^{-3}\,J$$

Το φορτίο q κινείται μέσα στο ομογενές ηλεκτρικό πεδίο μόνο υπό την επίδραση της σταθερής δύναμης F του πεδίου, οπότε αποκτά σταθερή επιτάχυνση και εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση.

Μονάδες 6

4.3. Η διαφορά δυναμικού μεταξύ των σημείων Α και Γ είναι:

$V_{A\Gamma} = E \cdot x = 10^4\ \frac{V}{m} \cdot 5 \cdot 10^{-2} m = 500\ V$. Οπότε:

$$V_{A\Gamma} = V_A - V_\Gamma \leftrightarrow V_\Gamma = V_A - V_{A\Gamma} = 200\ V.$$

Μονάδες 6

4.4. Εφαρμόζοντας το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας από το σημείο Α στο σημείο Γ λαμβάνουμε:

$$\Delta K = \Sigma W \leftrightarrow K_\Gamma - K_A = W_F \leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot u_\Gamma^2 - 0 = F \cdot x \leftrightarrow u_\Gamma^2 = \frac{2 \cdot F \cdot x}{m} \leftrightarrow$$

$$u_\Gamma = \sqrt{\frac{2 \cdot F \cdot x}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2 \cdot 10^{-2} N \cdot 5 \cdot 10^{-2} m}{2 \cdot 10^{-3}\ kg}} = \frac{1m}{s}.$$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4

4.1. Η επιτάχυνση που αποκτά το σωματίδιο στο ομογενές ηλεκτρικό πεδίο οφείλεται μόνο στην ηλεκτροστατική δύναμη, οπότε από τον 2ο νόμο του Νεύτωνα προκύπτει

$$\alpha = \frac{\Sigma F}{m} = \frac{E|q|}{m} = \frac{10^5 \cdot |-10^{-2}|}{10^{-3}}\frac{m}{s^2} = 10^6\,\frac{m}{s^2}$$

Μονάδες 6

4.2. Εφαρμόζουμε το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας για το σωματίδιο από την αρχή Ο μέχρι να σταματήσει στιγμιαία, έστω μέχρι το σημείο Α.

$$\Delta K = \Sigma W \Leftrightarrow K_{\tau\epsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = W_F \Leftrightarrow 0 - \frac{m\upsilon_0^2}{2} = qV_{OA} \Leftrightarrow V_{OA} = -\frac{m\upsilon_0^2}{2q} \Leftrightarrow$$

$$V_{OA} = -\frac{10^{-3}(4\cdot 10^3)^2}{2\,(-10^{-2})}V = 8\cdot 10^5\ \mathrm{Volt}$$

Μονάδες 6

4.3. Το σωματίδιο θα επιστρέψει στην αρχική του θέση όταν θα βρεθεί στην θέση $x = 0$. Επειδή το φορτίο του σωματιδίου είναι αρνητικό, δέχεται ηλεκτρική δύναμη αντίθετη με την αρχική ταχύτητα και επιβραδύνεται ομαλά. Έχουμε

$$x = \upsilon_0 t - \frac{\alpha t^2}{2} \Leftrightarrow 0 = t\left(\upsilon_0 - \frac{\alpha t}{2}\right) \Leftrightarrow t = 0\ (\alpha\rho\chi\acute{\eta})\ \ \acute{\eta}\ \upsilon_0 - \frac{\alpha t}{2} = 0$$

Η πρώτη λύση αντιστοιχεί στην αρχική θέση του σωματιδίου. Από την δεύτερη λύση προκύπτει

$$\upsilon_0 = \frac{\alpha t}{2} \Leftrightarrow t = \frac{2\upsilon_0}{\alpha} = \frac{2\cdot 4\cdot 10^3}{10^6}s = 8\cdot 10^{-3}s$$

Μονάδες 6

4.4. Η ταχύτητα με την οποία επιστρέφει το σωματίδιο στην αρχική θέση μπορεί να υπολογιστεί από την σχέση της ταχύτητας στην ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση.

$$\upsilon = \upsilon_0 - \alpha t = \upsilon_0 - \alpha\left(\frac{2\upsilon_0}{\alpha}\right) = \upsilon_0 - 2\upsilon_0 = -\upsilon_0 = -4\cdot 10^3\,\frac{m}{s}$$

Θεωρώντας θετική φορά προς τα δεξιά έχουμε

$$\Delta P = m\upsilon - m\upsilon_0 = m(-\upsilon_0) - m\upsilon_0 = -2m\upsilon_0 = -2\cdot 10^{-3}\cdot 4\cdot 10^3\ kg\frac{m}{s} = -8\ kg\frac{m}{s}$$

Κατά συνέπεια, το μέτρο της μεταβολής της ορμής του σωματιδίου είναι $8\ kg\frac{m}{s}$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4

4.1. Κατά την περιστροφή του δορυφόρου γύρω από τη Γη, η δύναμη παγκόσμιας έλξης αποτελεί την κεντρομόλο δύναμη:

$F_N = F_k$, δηλαδή:

$$\frac{G\,M_\Gamma M}{(R_\Gamma+h_1)^2} = \frac{Mu_1^2}{R_\Gamma+h_1} \leftrightarrow u_1^2 = \frac{G\,M_\Gamma}{R_\Gamma+h_1} = \frac{g_0 R_\Gamma^2}{3R_\Gamma} = \frac{g_0 \cdot R_\Gamma}{3} \quad (1)$$

Άρα η ταχύτητα του δορυφόρου είναι: $u_1 = \sqrt{\frac{g_0 \cdot R_\Gamma}{3}} = 4{,}62 \cdot 10^3$ m/s.

Μονάδες 6

4.2. Το έργο της βαρυτικής δύναμης του πεδίου είναι:

$$W_w = M \cdot (V_{\alpha\rho\chi} - V_{\tau\epsilon\lambda}) =$$

$$= M \cdot \left(-G \cdot \frac{M_\Gamma}{3R_\Gamma} + G \cdot \frac{M_\Gamma}{2R_\Gamma}\right) =$$

$$= M \cdot \left(+G \cdot \frac{M_\Gamma}{6R_\Gamma}\right) = M \cdot \frac{g_0 \cdot R_\Gamma}{6}$$ Επομένως: $W_w = 3{,}2 \cdot 10^9$ J

Μονάδες 6

4.3. Θα χρησιμοποιήσουμε αρχή διατήρηση της ενέργειας για το σύστημα Γη – μάζας m_2 :

$E_{\alpha\rho\chi} + E = E_{\tau\epsilon\lambda}$, δηλαδή: $-G \cdot \frac{M_\Gamma m_2}{R_\Gamma+h_1} + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot u_1^2 + E = 0$

Με τη βοήθεια της σχέσης (1) έχουμε:

$$E = \frac{g_0 \cdot R_\Gamma^2 \cdot m_2}{3R_\Gamma} - \frac{g_0 \cdot R_\Gamma \cdot m_2}{6} = \frac{g_0 \cdot R_\Gamma \cdot m_2}{6} = 1{,}06 \cdot 10^9 \text{ J}$$

Μονάδες 6

4.4. Στο ύψος h_1 το υπόλοιπο μέρος του δορυφόρου έχει μάζα: $m_1 = M - m_2 = 200kg$, και συνεχίζει να περιστρέφεται γύρω από τη Γη. Η συνολική μηχανική του ενέργεια είναι:

$E_{o\lambda} = K + U = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot u_1^2 - G \cdot \frac{M_\Gamma m_1}{R_\Gamma+h_1}$, όπου: $u_1^2 = \frac{G\,M_\Gamma}{R_\Gamma+h_1}$

Οπότε: $E_{o\lambda} = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot \frac{G\,M_\Gamma}{R_\Gamma+h_1} - G \cdot \frac{M_\Gamma m_1}{R_\Gamma+h_1} =$

-51- συνέχεια

$$-\frac{1}{2}\cdot G\cdot\frac{M_\Gamma m_1}{R_\Gamma+h_1}=-\ \frac{g_0\cdot R_\Gamma^2\cdot m_1}{6R_\Gamma}=-\frac{g_0\ \cdot R_\Gamma\cdot m_1}{6}$$

Τελικά: $E_{ολ} = -1{,}06 \bullet 10^9\ J$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4

4.1. Η μηχανική ενέργεια του συστήματος Γη – διαστημικό όχημα διατηρείται οπότε:

$U_1 + K_1 = U_2 + K_2$

$-G \cdot \frac{M_Γ(M+m)}{r_1} + \frac{1}{2} \cdot (M+m) \cdot u_1^2 = -G \cdot \frac{M_Γ(M+m)}{r_2} + \frac{1}{2} \cdot (M+m) \cdot u_2^2$, δηλαδή:

$$-\frac{g_0 R_Γ^2}{4R_Γ} + \frac{1}{2} \cdot u_1^2 = -\frac{g_0 R_Γ^2}{2R_Γ} + \frac{1}{2} \cdot u_2^2 \Rightarrow$$

$u_2^2 = -\frac{g_0 \cdot R_Γ}{2} + u_1^2 + g_0 \cdot R_Γ \Rightarrow$

$u_2 = 8{,}25 \cdot 10^3\ m/s$

Μονάδες 6

4.2. Κατά την απελευθέρωση της σεληνακάτου ισχύει η αρχή διατήρησης της ορμής για το σύστημα όχημα - σεληνάκατος:

$P_{ολ}^{αρχ} = P_{ολ}^{τελ}$, δηλαδή:

$(M+m) \cdot υ_2 = M \cdot υ + 0 \leftrightarrow υ = \frac{(M+m) \cdot u_2}{M}$

Άρα: $υ = 9{,}6 \cdot 10^3\ m/s$

Μονάδες 6

4.3. Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ για την κίνηση της σεληνακάτου από το σημείο απόστασης r_2 έως την επιφάνεια της Γης:

$ΔK = W_w$

$\frac{1}{2} \cdot m \cdot υ_3^2 - 0 = m \cdot (V_{αρχ} - V_{τελ})$

$\frac{1}{2} \cdot m \cdot υ_3^2 = m \cdot \left(-G \cdot \frac{M_Γ}{2R_Γ} + G \cdot \frac{M_Γ}{R_Γ}\right)$

$υ_3^2 = +G \cdot \frac{M_Γ}{R_Γ}$

$υ_3 = \sqrt{g_0 \cdot R_Γ} = 8 \cdot 10^3\ m/s$

Μονάδες 6

- 52 - συνέχεια

4.4. Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ για την κίνηση του οχήματος από το σημείο που απελευθερώθηκε η σεληνάκατος έως την επιφάνεια της Γης:

$$\Delta K = W_w + W_F$$

$$0 - \frac{1}{2} \cdot M \cdot \upsilon^2 = M \cdot (V_{\alpha\rho\chi} - V_{\tau\epsilon\lambda}) + W_F$$

$$-\frac{1}{2} \cdot M \cdot \upsilon^2 = M \cdot \left(-G \cdot \frac{M_\Gamma}{2R_\Gamma} + G \cdot \frac{M_\Gamma}{R_\Gamma}\right) + W_F$$

$$-\frac{1}{2} \cdot M \cdot \upsilon^2 = M \cdot \left(+G \cdot \frac{M_\Gamma}{2R_\Gamma}\right) + W_F$$

$$W_F = -\frac{1}{2} \cdot M \cdot \upsilon^2 - \frac{1}{2} \cdot M \cdot g_0 \cdot R_\Gamma$$

$$W_F = -\frac{1}{2} \cdot M \cdot (\upsilon^2 + g_0 \cdot R_\Gamma)$$

$$W_F = -468{,}48 \cdot 10^9 \text{ J}$$

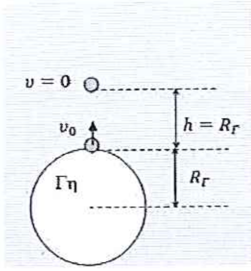
Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4

4.1. Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας από την εκτόξευση μέχρι το σημείο που φτάνει:

$E_M^{αρχ} = E_M^{τελ}$ ή $-G \cdot \frac{M_Γ \cdot m}{R_Γ} + \frac{1}{2} \cdot m \cdot υ_0^2 = -G \cdot \frac{M_Γ \cdot m}{2 \cdot R_Γ}$

ή $\frac{m \cdot υ_0^2}{2} = \frac{G \cdot M_Γ \cdot m}{2 \cdot R_Γ}$, οπότε $υ_0 = \sqrt{g_0 \cdot R_Γ} = 8 \cdot 10^3 \ \frac{\text{m}}{\text{s}}$



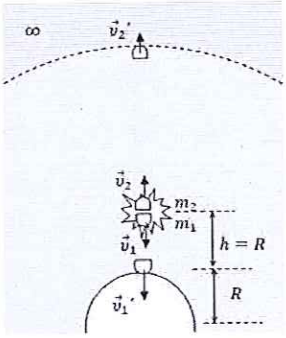
Μονάδες 6

4.2. Η ταχύτητα διαφυγής ενός σώματος από το ύψος $h = R_Γ$, είναι:

$υ_δ = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M_Γ}{R_Γ + h}} = \sqrt{g_0 \cdot R_Γ} = 8 \cdot 10^3 \ \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Μονάδες 6

4.3. Έστω $\vec{υ}_1$ η ταχύτητα του σώματος μάζας m_1 αμέσως μετά την έκρηξη και $\vec{υ}_1{}'$ η ταχύτητά του όταν φτάνει στην επιφάνεια της Γης. Το σώμα αυτό αμέσως μετά την έκρηξη κινείται προς τη Γη. Η μηχανική ενέργεια διατηρείται, συνεπώς:



$$E_M^{εκρ} = E_M^{τελ}$$

$$\frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot υ_1^2 - G \cdot \frac{M_Γ \cdot m_1}{R_Γ + h} = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot υ_1'^2 - G \cdot \frac{M_Γ \cdot m_1}{R_Γ}$$

$$υ_1^2 - \frac{G \cdot M_Γ}{R_Γ} = υ_1'^2 - \frac{2 \cdot G \cdot M_Γ}{R_Γ}$$

$$υ_1^2 = υ_1'^2 - \frac{G \cdot M_Γ}{R_Γ}$$

$$υ_1 = \sqrt{υ_1'^2 - g_0 \cdot R_Γ} = \sqrt{2{,}56 \cdot 10^8 - 0{,}64 \cdot 10^8} \ \frac{\text{m}}{\text{s}} = \sqrt{192} \cdot 10^3 \ \frac{\text{m}}{\text{s}} = 8 \cdot \sqrt{3} \cdot 10^3 \ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Κατά την έκρηξη που συνέβη στο αρχικό σώμα, με την οποία χωρίστηκε στα δύο νέα σώματα ίσης μάζας και η οποία θεωρείται ασήμαντης χρονικής διάρκειας, ισχύει η αρχή διατήρησης της ορμής για το σύστημα των σωμάτων αυτών:

$\vec{p}_{πριν} = \vec{p}_{μετά}$, ή $0 = m_1 \cdot υ_1 - m_2 \cdot υ_2$, άρα ισχύει $m_1 \cdot υ_1 = m_2 \cdot υ_2$ και επειδή $m_1 = m_2$ προκύπτει $υ_2 = υ_1 = 8 \cdot \sqrt{3} \cdot 10^3 \ \frac{\text{m}}{\text{s}} > υ_δ$

Άρα η μάζα m_2 διαφεύγει από την έλξη του πεδίου βαρύτητας της Γης κινούμενη προς το διάστημα.

Μονάδες 7

4.4. Για να υπολογίσουμε το μέτρο της ταχύτητας με την οποία η μάζα m_2 διαφεύγει στο διάστημα εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας, κατά την κίνησή της από το σημείο της έκρηξης μέχρι τη διαφυγή της από το πεδίο βαρύτητας της Γης:

$E_M^{εκρ} = E_M^{\infty}$, ή $\frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot υ_2^2 - G \cdot \frac{M_Γ \cdot m_2}{2 \cdot R_Γ} = \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot υ_2'^2$

ή $υ_2'^2 = υ_2^2 - g_0 \cdot R_Γ$

τελικά $υ_2{}' = \sqrt{υ_2^2 - g_0 \cdot R_Γ} = \sqrt{1{,}92 \cdot 10^8 - 0{,}64 \cdot 10^8} \ \frac{\text{m}}{\text{s}} = 8 \cdot \sqrt{2} \cdot 10^3 \ \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 4

4.1. Για την ηλεκτρική δυναμική ενέργεια του συστήματος των δύο σημειακών φορτίων ισχύει: $U = k_{\eta\lambda} \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r} = -9 \cdot 10^9 \cdot \frac{10^{-6} \cdot 2 \cdot 10^{-6}}{10^{-1}} J = -0{,}18 J$

Μονάδες 6

4.2. Η ορμή του συστήματος των σημειακών φορτίων διατηρείται σταθερή, αφού είναι μονωμένο σύστημα. Από την αρχή διατήρησης της ορμής, με θετική φορά τη φορά κίνησης του φορτίου q_1: $0 = m \cdot \upsilon_1 - m \cdot \upsilon_2$, $\frac{\upsilon_1}{\upsilon_2} = 1$

Μονάδες 6

4.3. Η ηλεκτρική δύναμη είναι συντηρητική δύναμη και συνεπώς η μηχανική ενέργεια του συστήματος των φορτίων διατηρείται σταθερή:

$$E_{\alpha\rho\chi} = E_{\tau\varepsilon\lambda},\ K_{\alpha\rho\chi} + U_{\alpha\rho\chi} = K_{\tau\varepsilon\lambda} + U_{\tau\varepsilon\lambda},\ 0 + U_{\alpha\rho\chi} = K_{\tau\varepsilon\lambda} + U_{\tau\varepsilon\lambda},$$

$$U_{\alpha\rho\chi} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \upsilon_1^2 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot \upsilon_2^2 + k_{\eta\lambda} \frac{q_1 \cdot q_2}{\frac{r}{5}},\ U_{\alpha\rho\chi} = m \cdot \upsilon_1^2 + k_{\eta\lambda} \frac{5 \cdot q_1 \cdot q_2}{r},$$

Συνεπώς, για το μέτρο της κοινής ταχύτητας των δύο φορτίων ισχύει:

$$\upsilon_1 = \upsilon_2 = \upsilon = \sqrt{\frac{U_{\alpha\rho\chi} - k_{\eta\lambda} \frac{5 \cdot q_1 \cdot q_2}{r}}{m}},\ \upsilon = \sqrt{\frac{-0{,}18 + 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{5 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot 10^{-6}}{10^{-1}}}{0{,}72 \cdot 10^{-6}} \frac{m}{s}},$$

$$\upsilon = \sqrt{\frac{-0{,}18 + 0{,}9}{0{,}72 \cdot 10^{-6}} \frac{m}{s}},\ \upsilon = 10^3 \frac{m}{s}$$

Μονάδες 7

4.4. Για την ηλεκτρική δυναμική ενέργεια U του συστήματος των σημειακών φορτίων q_1 και q_2 σε συνάρτηση με την απόστασή τους r ισχύει: $U = k_{\eta\lambda} \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r}$, $U = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{10^{-6} \cdot (-2 \cdot 10^{-6})}{r} (S.I.)$,

$$U = -\frac{0{,}018}{r} (S.I.)$$

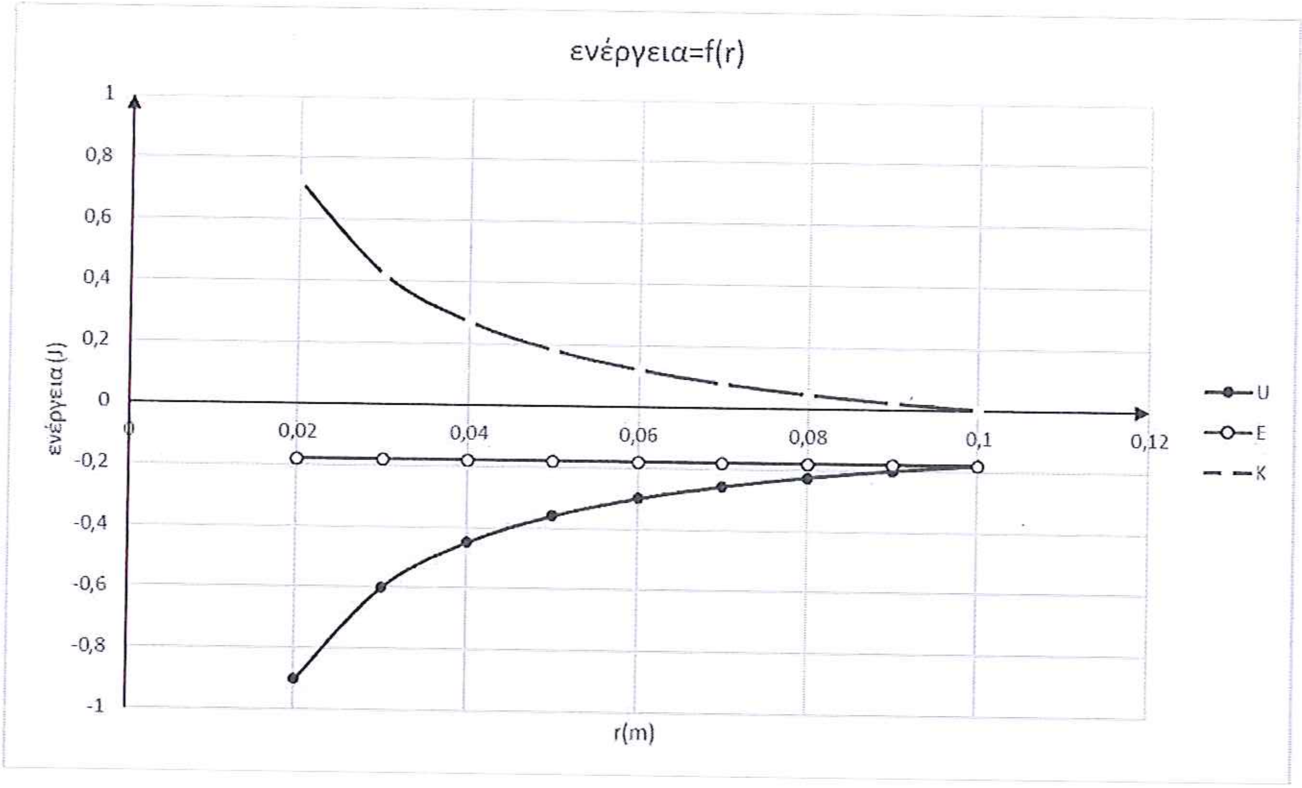
Η μηχανική ενέργεια E του συστήματος των σημειακών φορτίων q_1 και q_2 παραμένει σταθερή και ίση με την αρχική. Έτσι: $E = U_{\alpha\rho\chi}$, $E = -0{,}18 J$.

Για την κινητική ενέργεια U του συστήματος των σημειακών φορτίων q_1 και q_2 σε συνάρτηση με την απόστασή τους r ισχύει:

$$E = K + U,\ K = E - U,\ K = -0{,}18 + \frac{0{,}018}{r} (S.I.)$$

Οι ζητούμενες γραφικές παραστάσεις από τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ (οπότε $r = 10\ cm = 0{,}1\ m$) μέχρι τη χρονική στιγμή που η απόσταση των δύο σημειακών φορτίων έχει υποπενταπλασιαστεί ($r = 0{,}02\ m$) είναι:

-54- συνέχεια



Μονάδες 6